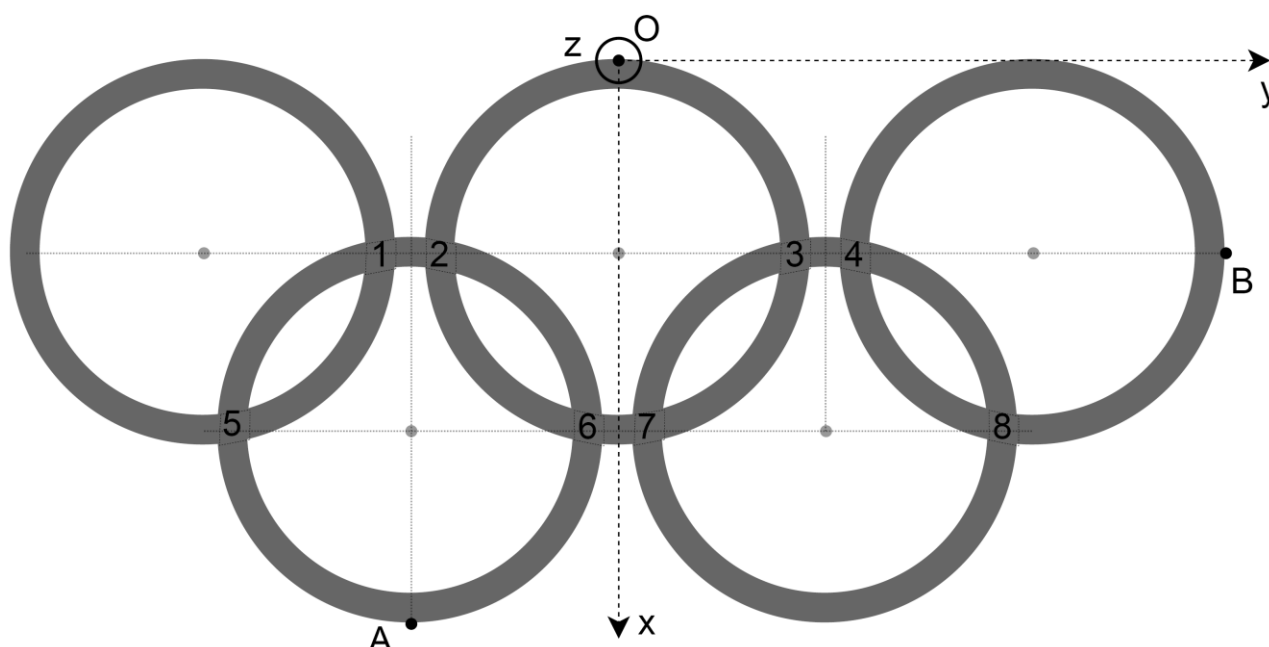


## MEHANIKA

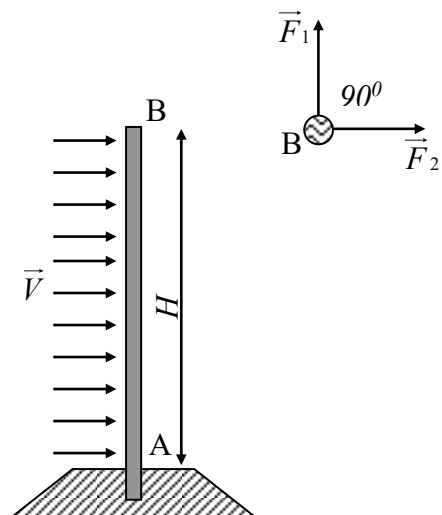
1. Olimpijski krugovi su univerzalni simbol Olimpijskih igara, koji se sastoji od pet međusobno povezanih prstenova, a predstavljaju jedinstvo pet kontinenata i susret sportista iz celog sveta. Znak po ugledu na ovaj simbol je okačen o sferni zglob O u koordinatnom početku, dok je u tačkama A i B putem dva kanapa AC i BC pričvršćen za tačku C(0,0,20t) tako da stoji u horizontalnoj  $xOy$  ravni. Spoljašnji prečnik svakog prstena iznosi  $12t$ , unutrašnji  $10t$ , dok je razmak između prstenova u istom redu jednak  $t$ . Znak je izliven u bronzi, specifične gustine  $\rho = 8800 \text{ kg/m}^3$ , dok debljina znaka iznosi  $t$ . Odrediti centar mase znaka u obliku olimpijskih krugova. Izračunati sile u kanapima AC i BC kao i reakciju sfernog zgloba O. Međusobne presečne površine prstenova (označene na slici brojevima 1-8) se mogu aproksimirati površinom  $S_m \approx t^2$  a smatrati da centri masa ovih površina leže na dve označene pomoćne linije paralelne  $y$ -osi. Gravitaciona konstanta iznosi  $g = 9,81 \text{ N/kg}$ . Parametar  $t$  iznosi  $t = 2 \text{ cm}$ .



2. Student treće godine energetike je dobio zadatak da odmeri aluminijumsko uže koje se montira između fiksnih tačaka A i B u istoj horizontalnoj ravni, na međusobnom rastojanju  $\overline{AB} = 200 \text{ m}$ . Vertikalno rastojanje tačaka vešanja od horizontalne podloge iznosi  $h = 10 \text{ m}$ . Minimalno zahtevano rastojanje užeta od podloge iznosi  $d_{\min} = 4 \text{ m}$ . Očekivani opseg temperatura užeta iznosi  $t \in [-20^\circ \text{C}, +60^\circ \text{C}]$  a na užu se može nahvatati led maksimalne podužne težine  $q_{\max} = 2 \text{ N/m}$  pri temperaturi  $t = t_L = -5^\circ \text{C}$ . Proračunati minimalnu dužinu užeta koju student treba da odseče (dok užu leži nezategnuto na horizontalnoj podlozi), sa tačnošću od 1 mm, pri temperaturi užeta  $t_u = 25^\circ \text{C}$ .

Podaci o užetu:  $A = 50 \text{ mm}^2$ ;  $\gamma = 2,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $\sigma_d = 7 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ ;  $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ;  $\alpha = 22 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

3. Ugaoni drveni stub za nadzemni vod, visine  $H$ , opterećen je u tački B koncentrisanim horizontalnim silama  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . Na slici je prikazan pogled odozgo na vrh stuba sa naznačenim smerovima sila. Pored ovih sila, stub može biti opterećen i silom pritiska vetra, brzine  $V$ , koji ravnomerno deluje duž stuba. Pretpostaviti da vetar duva u smeru pri kojem je ukupno mehaničko opterećenje stuba maksimalno.



- Dimenzionisati stub ako je on kružnog konstantnog poprečnog preseka. U proračunu tretirati da se temelj stuba A može aproksimirati kao idealno uklještenje.
- Koristeći rezultat i pretpostavke iz tačke a), odrediti otklon vrha stuba usled jednovremenog dejstva sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  i pritiska vetra.
- Proračunati koliki bi bio otklon vrha stuba usled jednovremenog dejstva sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  i pritiska vetra ako bi se temelj stuba tretirao kao neidealno uklještenje, kod kojeg dolazi do naginjanja stuba u temelju od  $3^\circ$ .

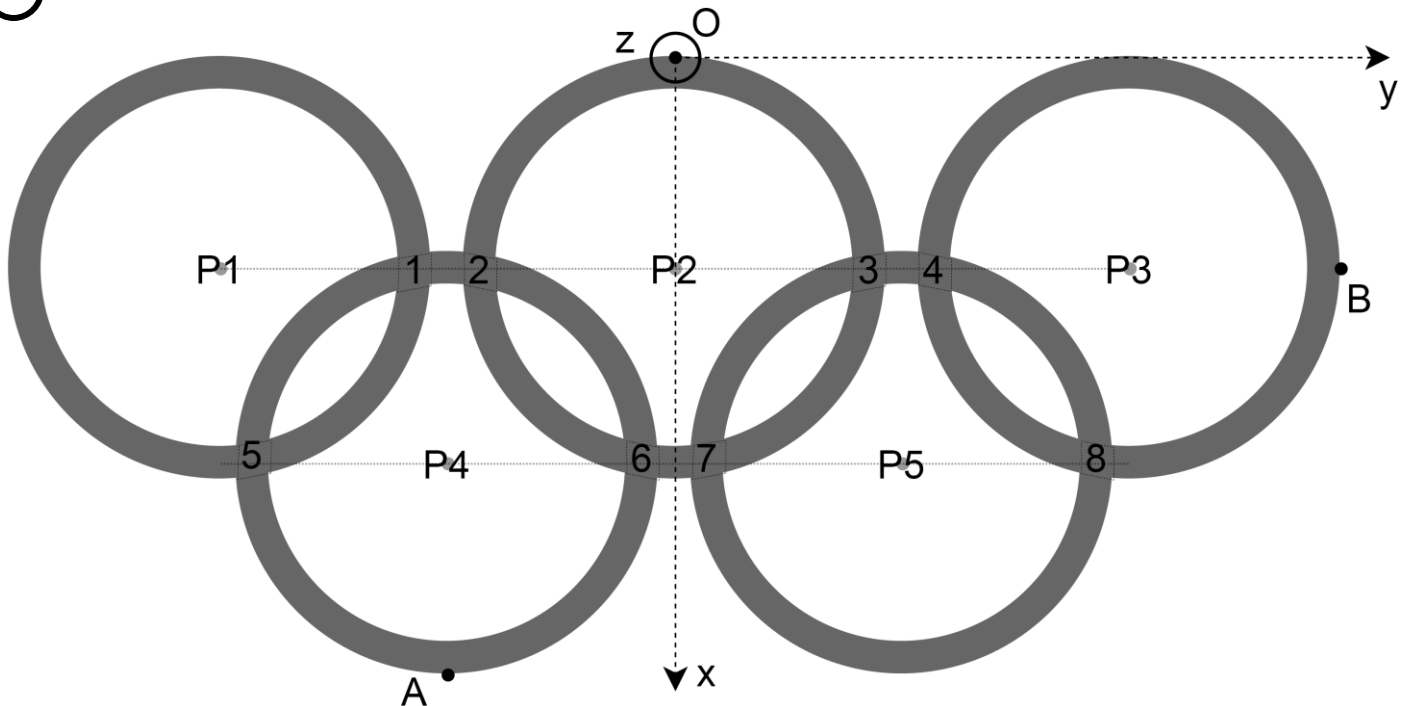
Poznato je:

$$F_1 = F_2 = 10^3 \text{ N}; \quad V = 30 \text{ m/s}; \quad C = 1,1; \quad \rho = 1,2 \text{ kg/m}^3; \quad H = 8 \text{ m}; \quad E = 10^{10} \text{ Pa}; \quad \sigma_d = 10^7 \text{ Pa}.$$

**Napomena:** Ispit traje 3 sata. Studenti koji su položili kolokvijum rade 2 zadatka po izboru. Ostali studenti rade sve zadatke. Potrebno je na svakom zadatku ostvariti minimalno 30% poena i zbirno minimalno 50% ukupnog broja poena.

## Rešenja

1.



Površina pojedinačnog prstena će biti označena  $S_p$  dok će zbirna površina preklapljenih delova 1, 2, 3 i 4 biti označena kao  $S_{1234}$  a zbirna površina preklapljenih delova 5, 6, 7 i 8 biti označena kao  $S_{5678}$ .

$$S_p = \pi(D^2 - d^2) / 4 = \pi(144t^2 - 100t^2) / 4 = 11\pi t^2$$

$$S_{1234} = S_{5678} = 4t^2$$

Centri masa pojedinačnih prstenova i centri masa zbirnih preklapljenih površina 1234 i 5678:

$$(x_{cm1}, y_{cm1}) = (6t, -13t)$$

$$(x_{cm2}, y_{cm2}) = (6t, 0)$$

$$(x_{cm3}, y_{cm3}) = (6t, +13t)$$

$$(x_{cm4}, y_{cm4}) = (11,5t, -6,5t)$$

$$(x_{cm5}, y_{cm5}) = (11,5t, +6,5t)$$

$$(x_{cm1234}, y_{cm1234}) = (6t, 0)$$

$$(x_{cm5678}, y_{cm5678}) = (11,5t, 0)$$

Centar mase znaka olimpijskih krugova:

$$(x_{cm}, y_{cm}) = \frac{S_p [(x_{cm1}, y_{cm1}) + (x_{cm2}, y_{cm2}) + (x_{cm3}, y_{cm3}) + (x_{cm4}, y_{cm4}) + (x_{cm5}, y_{cm5})] - S_{1234} (x_{cm1234}, y_{cm1234}) - S_{5678} (x_{cm5678}, y_{cm5678})}{5S_p - S_{1234} - S_{5678}}$$

$$(x_{cm}, y_{cm}) = \frac{11\pi t^2 [(6t, -13t) + (6t, 0) + (6t, +13t) + (11,5t, -6,5t) + (11,5t, +6,5t)] - 4t^2 (6t, 0) - 4t^2 (11,5t, 0)}{5 \cdot 11\pi t^2 - 4t^2 - 4t^2}$$

$$(x_{cm}, y_{cm}) = (8,1733t, 0)$$

Težina celog znaka:

$$Q = \rho V g = \rho S t g = \rho (5S_p - S_{1234} - S_{5678}) t g = (55\pi - 8) \rho t^3 g = 113,806 \text{ N}$$

Koordinate tačaka A i B:

$$A(17,5t, -6,5t)$$

$$B(6t, 19t)$$

Komponente sila u kanapima  $S_A$  i  $S_B$  (obe sile usmerene ka tački C):

$$\begin{aligned} S_{Ax} &= -\frac{17,5}{\sqrt{17,5^2 + 6,5^2 + 20^2}} S_A & S_{Bx} &= -\frac{6}{\sqrt{6^2 + 19^2 + 20^2}} S_B \\ S_{Ay} &= +\frac{6,5}{\sqrt{17,5^2 + 6,5^2 + 20^2}} S_A & S_{By} &= -\frac{19}{\sqrt{6^2 + 19^2 + 20^2}} S_B \\ S_{Az} &= +\frac{20}{\sqrt{17,5^2 + 6,5^2 + 20^2}} S_A & S_{Bz} &= +\frac{20}{\sqrt{6^2 + 19^2 + 20^2}} S_B \end{aligned}$$

Jednačine statičke ravnoteže:

$$\begin{aligned} (1): \quad \sum F_x &= 0 \Leftrightarrow R_x + S_{Ax} + S_{Bx} = 0; \\ (2): \quad \sum F_y &= 0 \Leftrightarrow R_y + S_{Ay} + S_{By} = 0; \\ (3): \quad \sum F_z &= 0 \Leftrightarrow R_z + S_{Az} + S_{Bz} - Q = 0; \\ (4): \quad \sum M_{Ox} &= 0 \Leftrightarrow +S_{Bz} \times y_B - S_{Az} \times |y_A| = 0; \\ (5): \quad \sum M_{Oy} &= 0 \Leftrightarrow +Q \times x_{cm} - S_{Bz} \times x_B - S_{Az} \times x_A = 0; \end{aligned}$$

$$(4) \Rightarrow S_A = 2,8327 S_B$$

$$(5) \Rightarrow \boxed{S_B = 22,973 \text{ N}} \quad \wedge \quad \boxed{S_A = 65,076 \text{ N}}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{R_x = 46,508 \text{ N}}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{R_y = -30,922 \text{ N}}$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{R_z = 49,959 \text{ N}}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 74,934 \text{ N}$$

2.

Proračun ekvivalentne zapremine sa ledom:

$$q_{ekv} = q_0 + q_L = \gamma \cdot A + q_L \Rightarrow \gamma_{ekv} = \frac{q_{ekv}}{A} = \gamma + \frac{q_L}{A} = 6,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$$

Kako bi provodnik bio najkraći, potrebno je dostići dozvoljeno naprezanje u kritičnom režimu. Kritični režim se može javiti pri temperaturi  $t = t_{\min} = -20^\circ\text{C}$  ili pri temperaturi  $t = t_L = -5^\circ\text{C}$  sa maksimalnim dodatnim opterećenjem usled leda.

Pretpostavimo da se maksimalno naprezanje javlja pri temperaturi  $t = t_L = -5^\circ\text{C}$  sa maksimalnim dodatnim opterećenjem usled leda.

Proračun ugiba na  $t = t_L = -5^\circ\text{C}$  sa maksimalnim dodatnim opterećenjem usled leda:

$$f_L = \frac{\gamma_{ekv} l^2}{2\sigma_d} = \frac{6,8 \cdot 10^4 \cdot 100^2}{2 \cdot 7 \cdot 10^7} = 4,857 \text{ m}$$

Proračun dužine nezategnutog provodnika pri temperaturi  $t = t_L = -5^\circ\text{C}$ :

$$f_L^3 - \frac{3}{4} l (2L_0 - 2l) \cdot f_L - \frac{3}{4} \frac{\gamma_{ekv} l^4}{E} = 0$$

$$2L_0|_{-5^\circ\text{C}} = 2l + \frac{4}{3} \frac{f_L^3 - \frac{3}{4} \frac{\gamma_{ekv} l^4}{E}}{l \cdot f_L} = 200 + \frac{4}{3} \frac{4,857^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{6,8 \cdot 10^4 \cdot 100^4}{7 \cdot 10^{10}}}{100 \cdot 4,857} = 200,1145 \text{ m}$$

Proračun dužine nezategnutog provodnika pri temperaturi  $t = t_{\min} = -20^\circ\text{C}$ :

$$2L_0|_{-20^\circ\text{C}} = 2L_0|_{-5^\circ\text{C}} \times [1 + \alpha \times (t_{-20^\circ\text{C}} - t_{-5^\circ\text{C}})] = 200,1145 \cdot (1 + 22 \cdot 10^{-6} \times (-20 - (-5))) = 200,0485 \text{ m}$$

Proračun naprezanja u provodniku pri temperaturi  $t = t_{\min} = -20^\circ\text{C}$ :

$$f_{-20^\circ\text{C}}^3 - \frac{3}{4} l (2L_0|_{-20^\circ\text{C}} - 2l) \cdot f_{-20^\circ\text{C}} - \frac{3}{4} \frac{\gamma l^4}{E} = 0 \Rightarrow f_{-20^\circ\text{C}}^3 - \frac{3}{4} \cdot 100 \cdot (200,0485 - 200) \cdot f_{-20^\circ\text{C}} - \frac{3}{4} \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 100^4}{7 \cdot 10^{10}} = 0$$

$$\Rightarrow f_{-20^\circ\text{C}} = 3,496 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \sigma_{-20^\circ\text{C}} = \frac{\gamma l^2}{2 f_{-20^\circ\text{C}}} = \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 100^2}{2 \cdot 3,496} = 4 \cdot 10^7 \text{ Pa} < \sigma_d$$

Pretpostavka je bila dobra jer je dobijeno naprezanje na  $t = t_{\min} = -20^\circ\text{C}$  manje od dozvoljenog.

Sada je potrebno proveriti da li se najveći ugib javlja pri temperaturi  $t = t_L = -5^\circ\text{C}$  sa maksimalnim dodatnim opterećenjem usled leda ili pri temperaturi  $t = t_{\max} = +60^\circ\text{C}$ .

Proračun dužine nezategnutog provodnika pri temperaturi  $t = t_{\max} = +60^\circ\text{C}$ :

$$2L_0|_{+60^\circ\text{C}} = 2L_0|_{-5^\circ\text{C}} \times [1 + \alpha \times (t_{+60^\circ\text{C}} - t_{-5^\circ\text{C}})] = 200,1145 \cdot (1 + 22 \cdot 10^{-6} \times (+60 - (-5))) = 200,4007 \text{ m}$$

Proračun ugiba provodnika pri temperaturi  $t = t_{\max} = +60^\circ\text{C}$ :

$$f_{+60^\circ\text{C}}^3 - \frac{3}{4} l (2L_0|_{+60^\circ\text{C}} - 2l) \cdot f_{+60^\circ\text{C}} - \frac{3}{4} \frac{\gamma l^4}{E} = 0 \Rightarrow f_{+60^\circ\text{C}}^3 - \frac{3}{4} \cdot 100 \cdot (200,4007 - 200) \cdot f_{+60^\circ\text{C}} - \frac{3}{4} \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 100^4}{7 \cdot 10^{10}} = 0$$

$$\Rightarrow f_{+60^\circ\text{C}} = 5,926 \text{ m} > f_L$$

Maksimalni ugib provodnika u opsegu definisanih mogućih stanja se javlja pri  $t = t_{\max} = +60^\circ\text{C}$ .

Maksimalni dozvoljeni ugib je  $f_{\max} = H - d_{\min} = 10\text{ m} - 4\text{ m} = 6\text{ m}$  pa je  $f_{+60^{\circ}\text{C}} < f_{\max}$ .

Tražena dužina provodnika na temperaturi  $t = t_u = 25^{\circ}\text{C}$ :

$$2L_0|_{+25^{\circ}\text{C}} = 2L_0|_{-5^{\circ}\text{C}} \times [1 + \alpha \times (t_u - t_{-5^{\circ}\text{C}})] = 200,1145 \cdot (1 + 22 \cdot 10^{-6} \times (+25 - (-5))) = 200,247\text{ m}$$

3.

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 1,41 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$F_v = \frac{1}{2} C \rho V^2 H D = 4752 \cdot D [\text{N}], \quad D [\text{m}]$$

$$q_v = \frac{F_v}{H} = \frac{1}{2} C \rho V^2 D = 594 \cdot D \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right], \quad D [\text{m}]$$

Statički uslovi ravnoteže:

$$\sum F_T = 0 \Rightarrow R_A - F_R - F_v = 0 \Rightarrow R_A = F_R + F_v$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow M_A - F_v \times \frac{H}{2} - F_R \times H = 0 \Rightarrow M_A = F_v \times \frac{H}{2} + F_R \times H$$

Moment u preseku:

$$M(z) = R_A z - M_A - q_v \frac{z^2}{2}$$

a) Maksimalni moment se javlja u uklještenju (tačka A):

$$|M(z)|_{\max} = M_{\max} = M_A = F_v \times \frac{H}{2} + F_R \times H = 19008 \cdot D + 11313,7 [\text{Nm}], \quad D [\text{m}]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi D^3}{32}} \leq \sigma_d \Rightarrow 32 M_{\max} = \pi D_{\min}^3 \sigma_d$$

$$608256 \cdot D_{\min} + 362038,4 = 3,14 \cdot 10^7 D_{\min}^3$$

$$D_{\min}^3 - 0,01937 D_{\min} - 0,01153 = 0$$

$$\boxed{D_{\min} = 0,254 \text{ m} = 25,4 \text{ cm}}$$

b) Sada se mogu izračunati apsolutne vrednosti veličina izraženih preko prečnika:

$$F_v = \frac{1}{2} C \rho V^2 H D = 4752 \cdot D_{\min} = 1208,7 \text{ N}$$

$$q_v = \frac{F_v}{H} = \frac{1}{2} C \rho V^2 D = 594 \cdot D_{\min} = 151,08 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$R_A = F_R + F_v = 2622,9 \text{ N}$$

$$M_A = F_v \times \frac{H}{2} + F_R \times H = 16148,4 \text{ Nm}$$

Jednačina koja uvažava elastičnu liniju stuba ima formu:

$$Bu''(z) = -M(z)$$

$$Bu''(z) = M_A - R_A z + q_v \frac{z^2}{2}$$

$$Bu'(z) = M_A z - R_A \frac{z^2}{2} + q_v \frac{z^3}{6} + C_1$$

$$Bu(z) = M_A \frac{z^2}{2} - R_A \frac{z^3}{6} + q_v \frac{z^4}{24} + C_1 z + C_2$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$B = EI_x = E \frac{\pi D_{\min}^4}{64} = 2,05 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$$

$$u(H) = \frac{1}{B} \left[ M_A \frac{H^2}{2} - R_A \frac{H^3}{6} + q_v \frac{H^4}{24} \right] = 0,1555 \text{ m} \approx \boxed{15,5 \text{ cm}}$$

c) Kako je  $\cos(3^\circ) = 0,999 \approx 1$  može se smatrati da će rezultujuća horizontalna sila u tački B kao i sila usled pritiska vetra ostati upravne na stub (ostaće u transverzalnom pravcu).

I varijanta: Otklon stuba B će biti jednak otklonu pri idealnom uklještenju i dejstvu svih sila (dobijeno u prethodnoj tački) sa pridodatim otklonom usled nagnjanja stuba bez dejstva sila:

$$u_{ni}^{(1)} = u_1 + u_2$$

$$u_1 = 15,5 \text{ cm}$$

$$u_2 = H \sin(3^\circ) \approx H \tan(3^\circ) = 0,42 \text{ m} = 42 \text{ cm}$$

$$\boxed{u_{ni}^{(1)} = 57,5 \text{ cm}}$$

II varijanta: Uvažiće se jednačina elastične linije grede uz modifikovani granični uslov:

$$Bu''(z) = -M(z)$$

$$Bu''(z) = M_A - R_A z + q_v \frac{z^2}{2}$$

$$Bu'(z) = M_A z - R_A \frac{z^2}{2} + q_v \frac{z^3}{6} + C_1$$

$$Bu(z) = M_A \frac{z^2}{2} - R_A \frac{z^3}{6} + q_v \frac{z^4}{24} + C_1 z + C_2$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$u'(0) = \sin(3^\circ) = 0,0523 \Rightarrow C_1 = Bu'(0) = 1,073 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2$$

$$u_{ni}^{(2)}(H) = \frac{1}{B} \left[ M_A \frac{H^2}{2} - R_A \frac{H^3}{6} + q_v \frac{H^4}{24} + C_1 H \right] = 0,575 \text{ m} \approx \boxed{57,5 \text{ cm}}$$